William Stallings
Computer Organization and Architecture

Chapter 09
Circuitos Digitais e Álgebra Booleana

Álgebra de Boole (ou Booleana)

- Desenvolvida pelo matemático britânico George Boole para estudo da lógica.
- Definida sobre um conjunto de dois elementos:

(falso, verdadeiro) (0, 1) (baixo, alto)

- Seus elementos, a princípio, não tem significado numérico.
- Postulados: se x é uma variável booleana então:
  - Se $x \neq 0 \Rightarrow x = 1$
  - Se $x \neq 1 \Rightarrow x = 0$

Álgebra de Boole: funções

- Uma variável booleana só pode assumir apenas um dos valores possíveis (0 e 1)
- Uma ou mais variáveis e operadores podem ser combinados formando uma função lógica
  - $Z_1(A) = f(A) = ...$ (expressão usando var. A)
  - $Z_2(A,B) = f(A,B) = ...$ (expr. usando var. A e B)
- Resultados de uma função lógica podem ser expressos numa tabela relacionando todas as combinações possíveis dos valores que suas variáveis podem assumir e seus resultados correspondentes: a Tabela-Verdade.

Álgebra de Boole: Tabela Verdade

Variáveis | Função Lógica

A	B	Z=f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Lista das combinações possíveis dos estados das variáveis de entrada

Resultados da função lógica para cada combinação dos estados de entrada

- Tabela-Verdade relaciona os resultados (saída) de uma função lógica para todas as combinações possíveis de suas variáveis (entrada).
- Na Tabela-Verdade acima a função lógica Z possui duas variáveis A e B, sendo Z = f(A, B) = A + B

Álgebra de Boole: Operações

- São definidas algumas operações elementares na álgebra booleana:
  - Operação “Não” (NOT)
  - Operação “E” (AND)
  - Operação “Ou” (OR)
  - NAND
  - NOR
  - Operação “Ou-Exclusivo” (Exclusive-Or ou XOR)
  - XNOR

Porta Lógica NOT

- É a porta Inversora
- Operador: Barra, Apóstrofo

$\overline{A}$, A'

- Símbolo

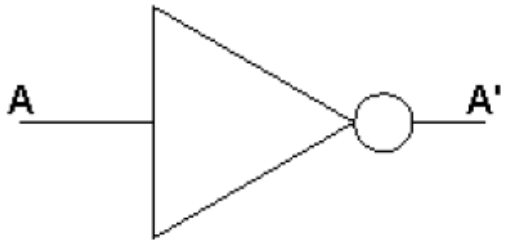


Tabela da Verdade

A	F = A'
0	1
1	0

Porta Lógica OR

- Necessita de duas ou mais entradas
- Operador: +

$$F = A + B$$

- Símbolo

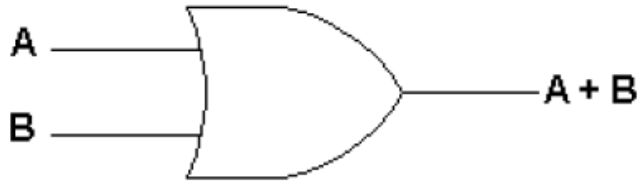
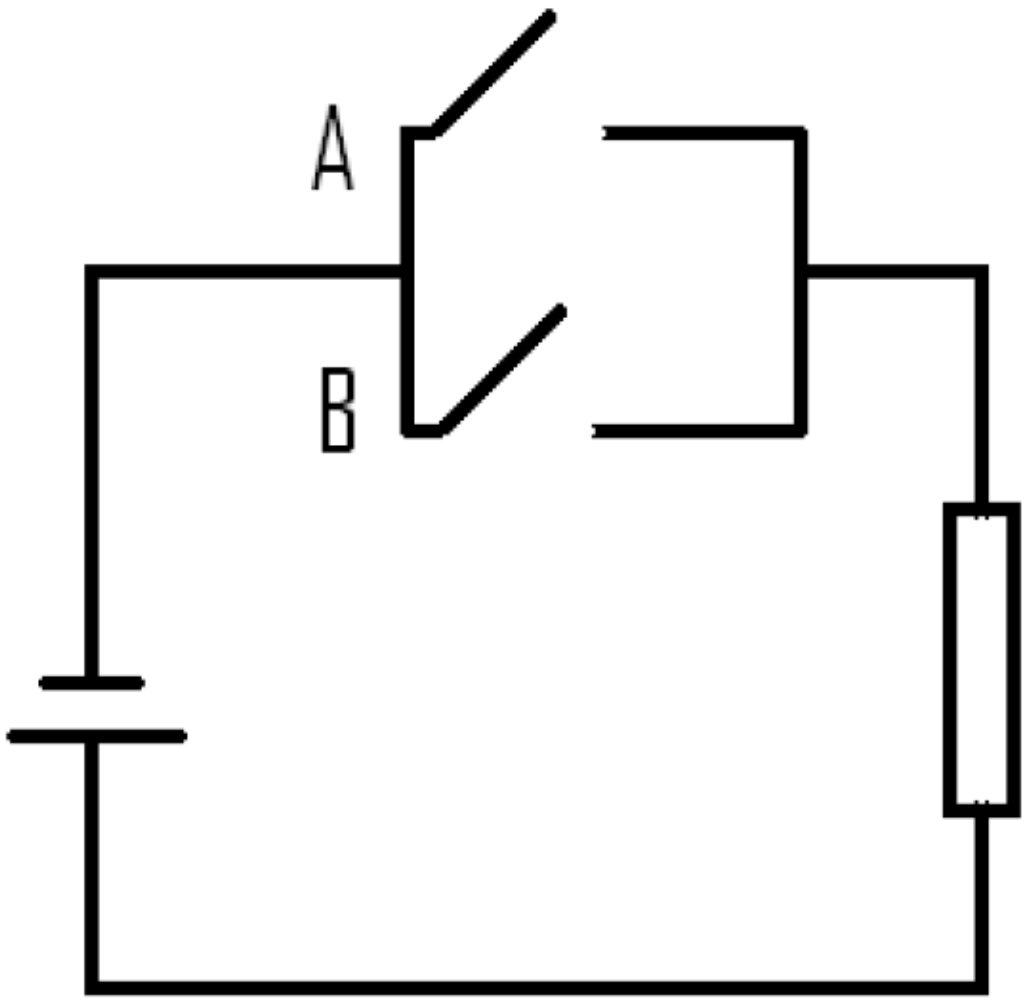


Tabela da Verdade

A	B	F = (A+B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Porta Lógica OR



Porta Lógica AND

- Necessita de duas ou mais entradas
- Operador: .

$$F = A \cdot B$$

- Símbolo

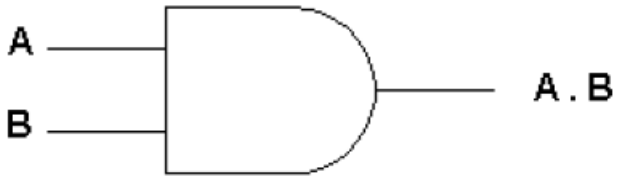


Tabela da Verdade

A	B	F = (A.B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Porta Lógica AND

- Necessita de duas ou mais entradas
- Operador: .

$$F = A \cdot B$$

- Símbolo

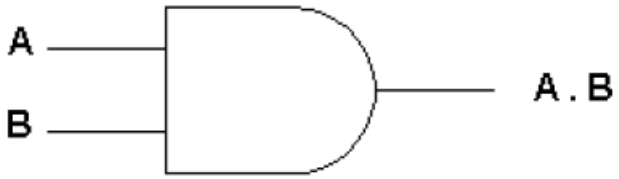
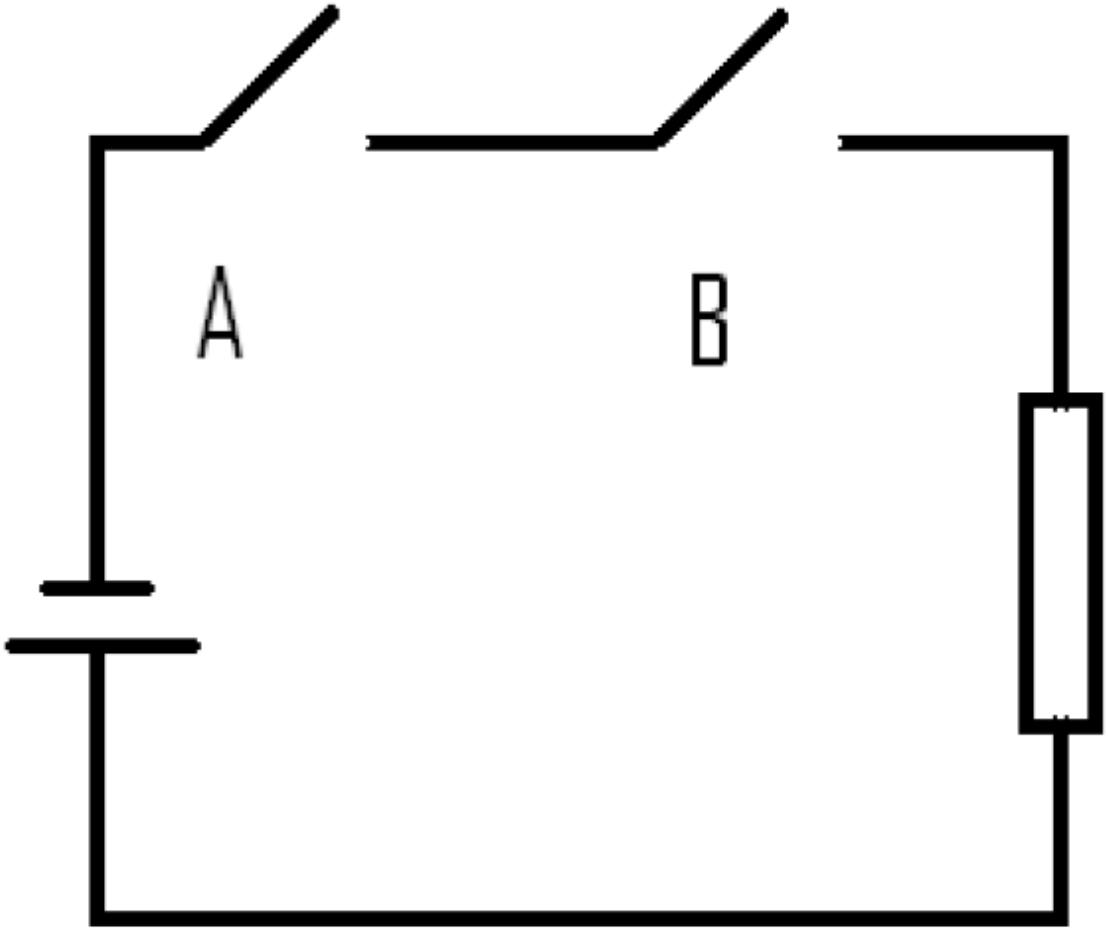


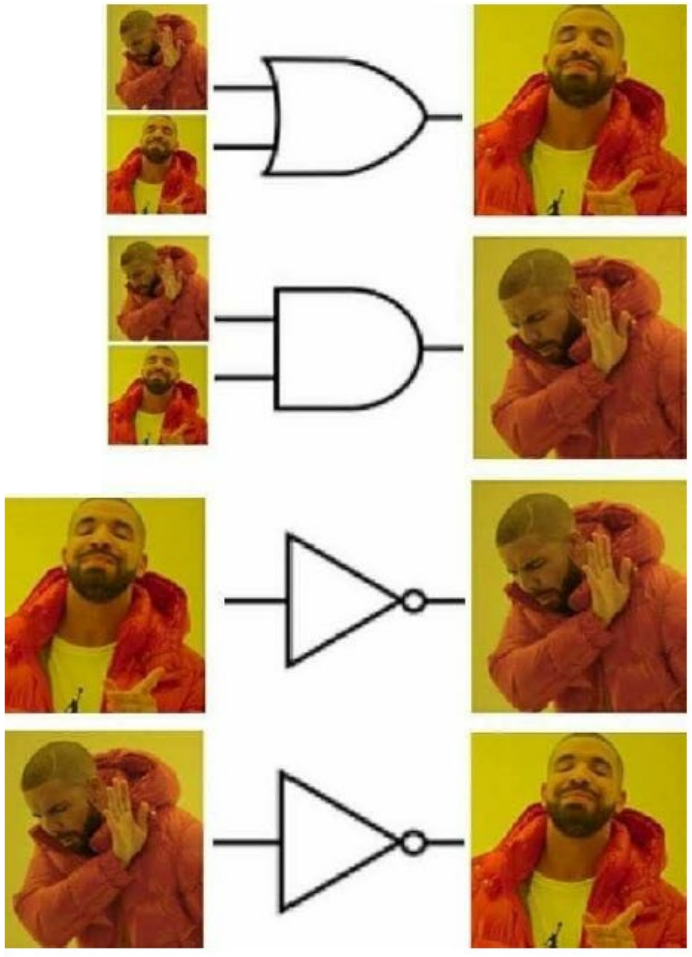
Tabela da Verdade

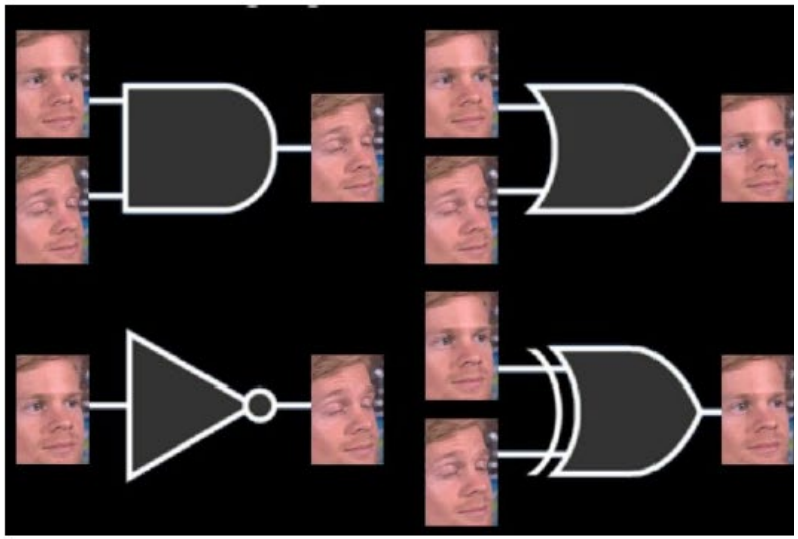
A	B	F = (A.B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Porta Lógica AND



Portanto





Porta Lógica NOR

- Equivalente a uma porta OR seguido de uma NOT
- Operador:

$$F = (A + B)'$$

- Símbolo

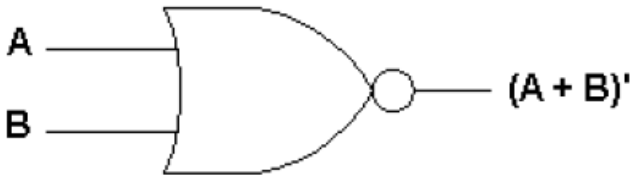


Tabela da Verdade

A	B	F = (A+B)'
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Porta Lógica NAND

- Equivalente a uma porta AND seguido de uma NOT
- Operador:

$$F = (A \cdot B)'$$

- Símbolo

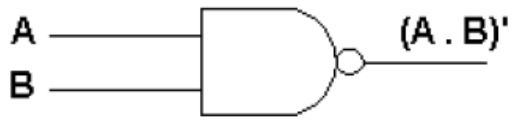


Tabela da Verdade

A	B	F = (A.B)'
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Porta Lógica XOR

- É o OU Exclusivo
- Compara dois valores, se forem diferentes, dá saída = 1
- Operador:

$$F = (A \oplus B)$$

- Símbolo

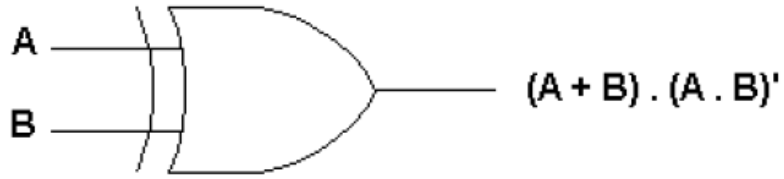


Tabela da Verdade

A	B	F = (A⊕B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Porta Lógica XNOR

- É o complemento da Função XOR
- Operador:

$$F = (A \oplus B)'$$

Com 3 ou mais entradas:
Se o número de entradas 1 for ímpar = 1
Se o número de entradas 1 for par = 0

- Símbolo

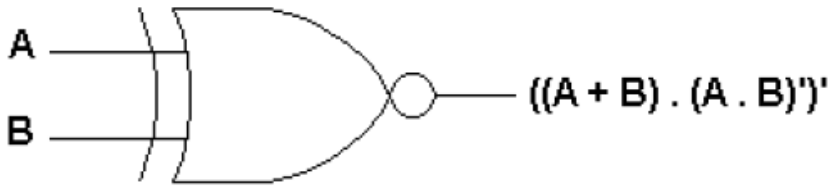
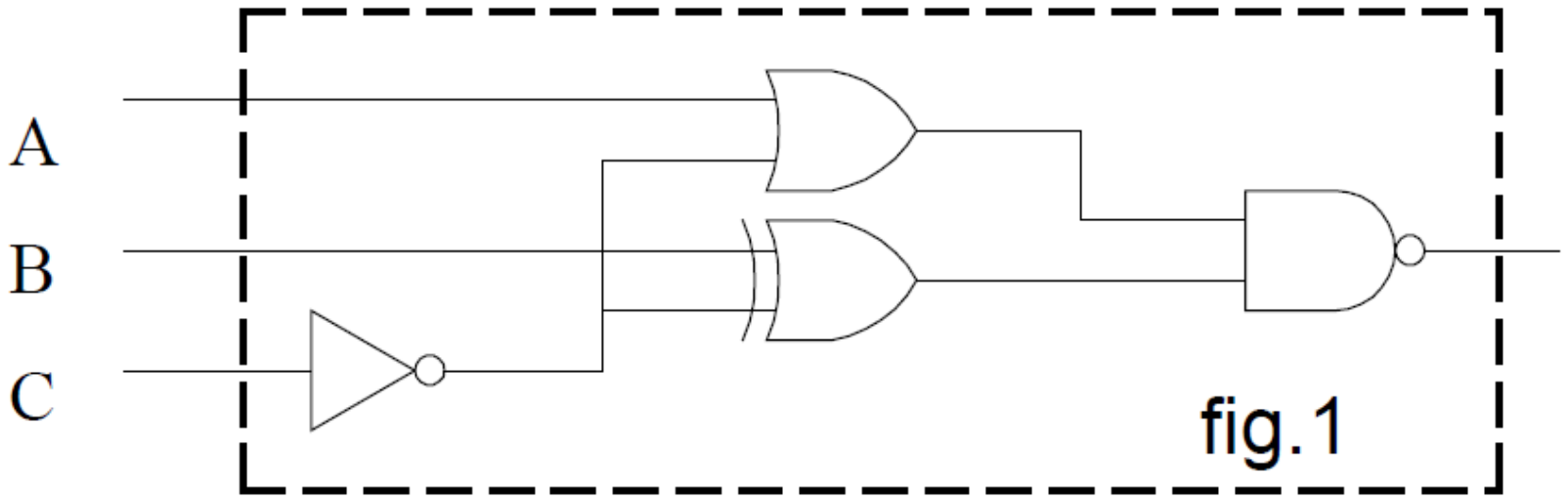


Tabela da Verdade

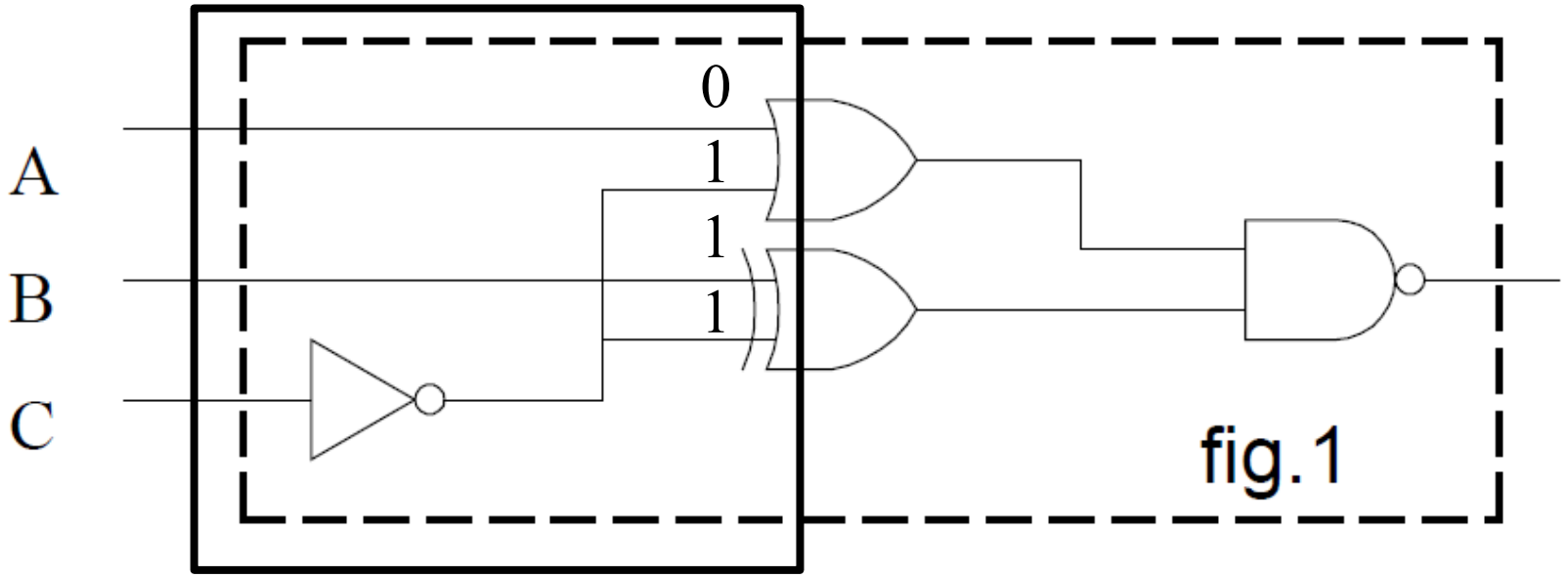
A	B	F = (A⊕B)'
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo



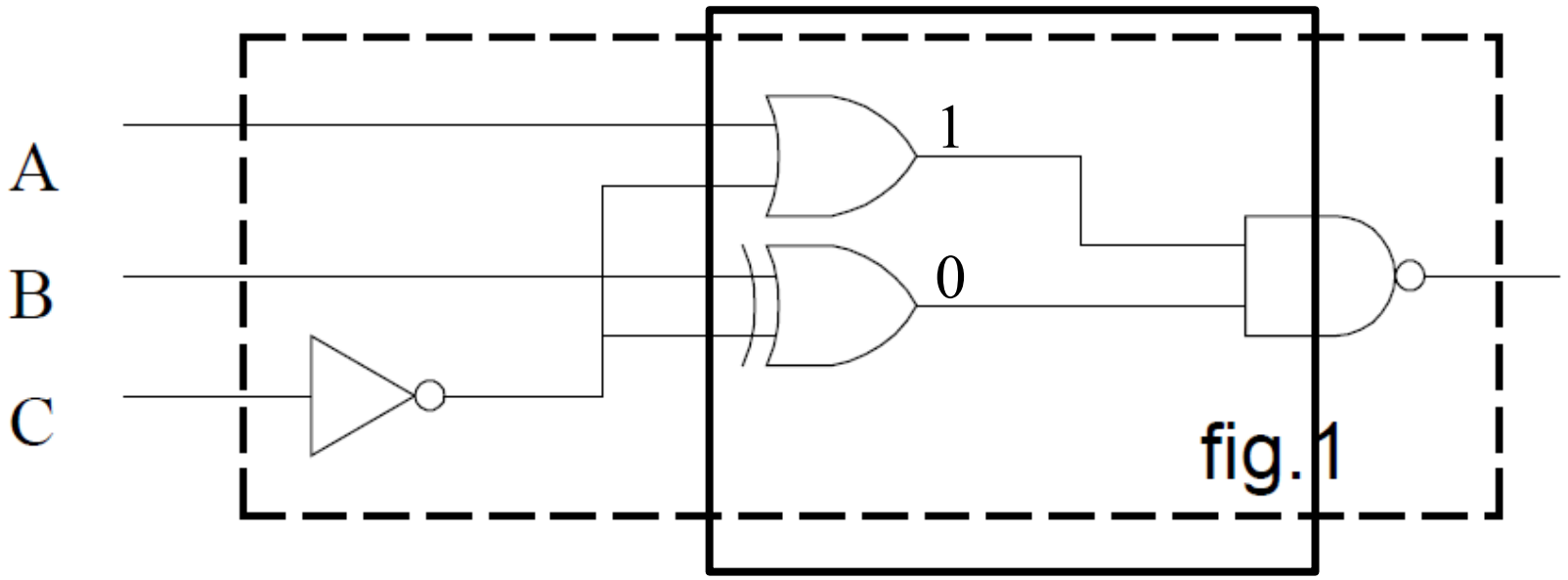
$A = 0, B = 1, C = 0$

Exemplo



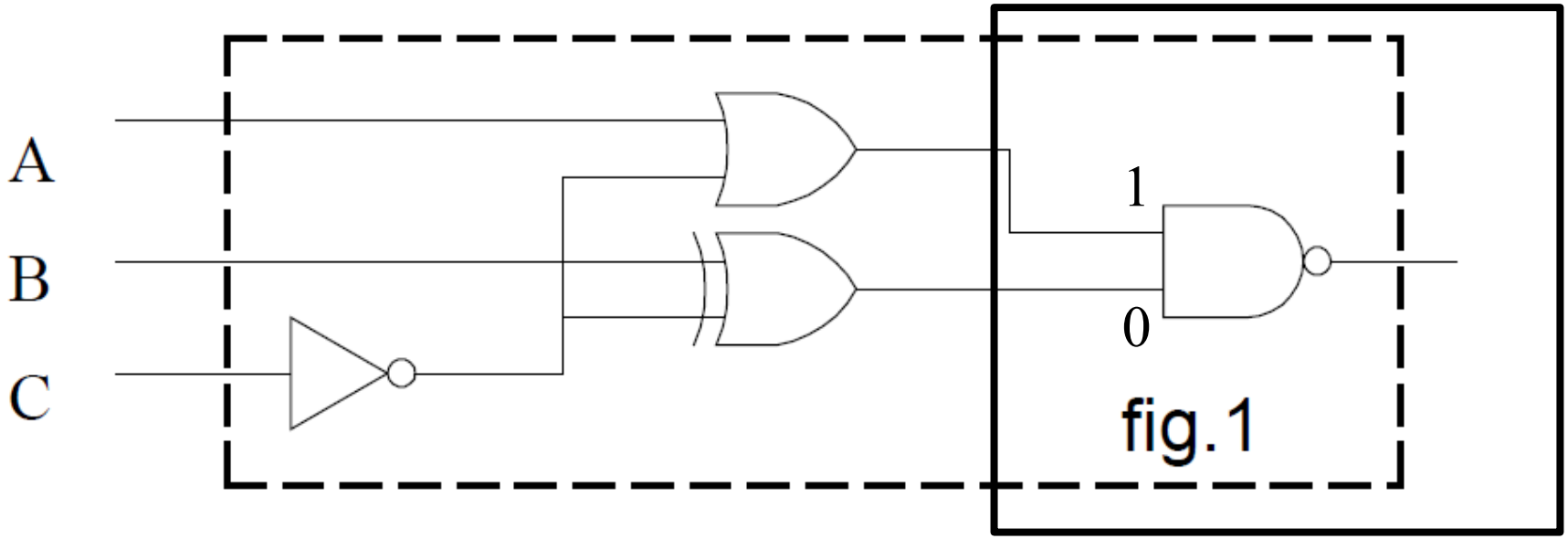
A = 0, B = 1, C = 0

Exemplo



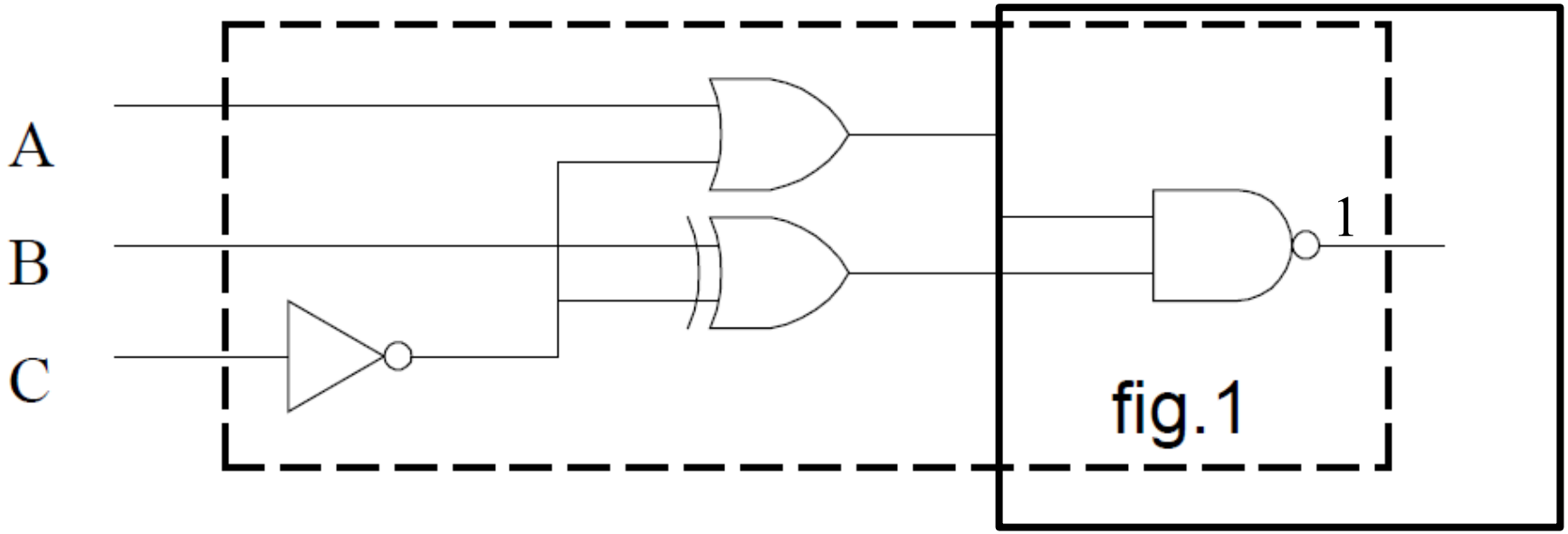
A = 0, B = 1, C = 0

Exemplo



A = 0, B = 1, C = 0

Exemplo



A = 0, B = 1, C = 0

Exercícios

S = 0

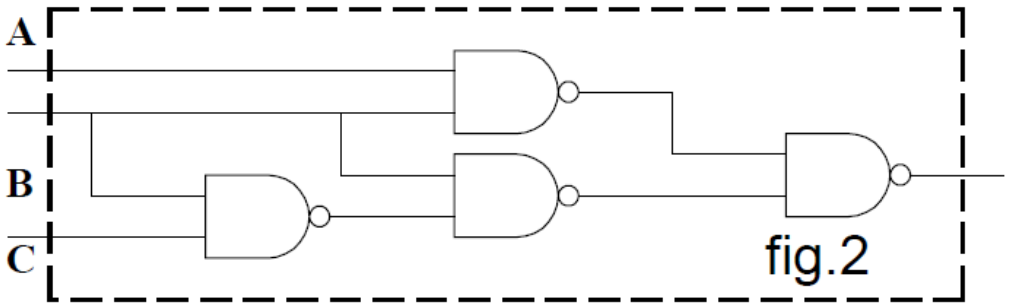
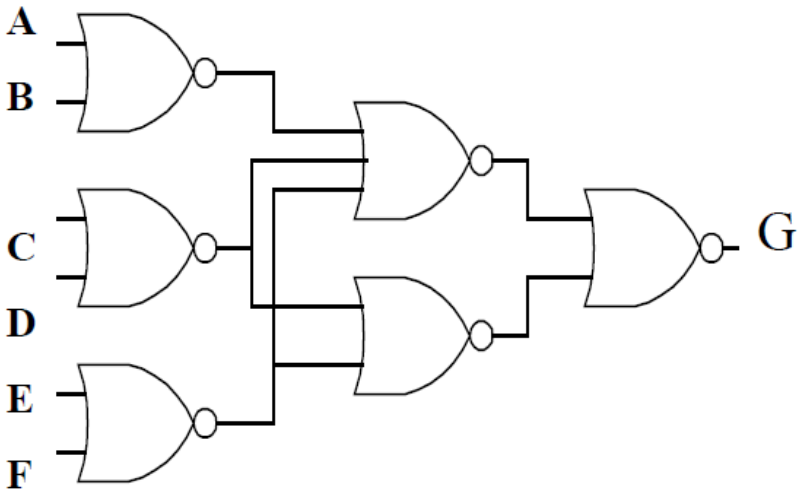


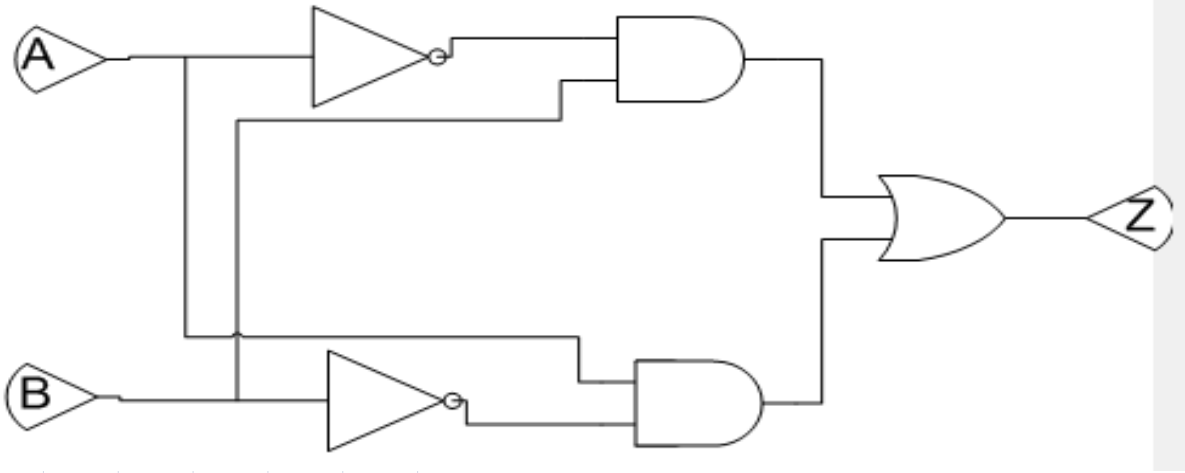
fig.2

A = 0, B = 1, C = 1, D = 0, E = 0, F = 1

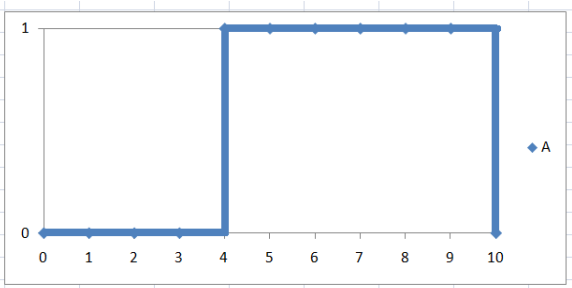
S = 0

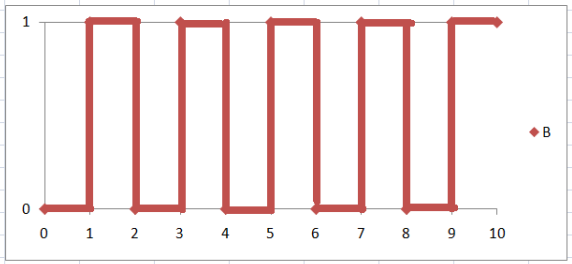


Exercício



T	A	B	Z
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	1
4	1	0	1
5	1	1	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	0	1
9	1	1	0
10	0	1	1





Álgebra de Boole: precedência

- Precedência das Operações
  - (0) parêntesis
  - (1) “Negação”
  - (2) “E”
  - (3) “Ou”, “Ou-exclusivo”
- O uso de parêntesis altera a precedência “normal” dos operadores, como na álgebra comum.

Álgebra de Boole: propriedades

- Sendo A, B e C variáveis booleanas
  - Propriedade Comutativa
    - $A \cdot B = B \cdot A$
    - $A + B = B + A$
    - $A \oplus B = B \oplus A$
  - Propriedade Associativa
    - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$
    - $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
    - $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$
  - Propriedade Distributiva
    - $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
    - $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

Álgebra de Boole: propriedades

- Propriedades (Leis) de Absorção
  - $A + A.B = A$
  - $A + \overline{A}.B = A + B$
  - $(A + \overline{B}).B = A.B$
- Identidades importantes
  - $A.B + A.\overline{B} = A$
  - $(A + B) . (A + \overline{B}) = A$
  - $A.(A + B) = A$
  - $A.(\overline{A} + B) = AB$
  - $A.B + \overline{A}.C = \overline{A} . B . C$

Álgebra de Boole: dualidade

- Teorema de Morgan

- $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

- $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$

Consenso

- $A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + A' \cdot C$
- $(A+B) \cdot (A'+C) \cdot (B+C) = (A+B) \cdot (A'+C)$

Álgebra de Boole: identidades

- NOT
  - $\overline{0} = 1$
  - $\overline{1} = 0$
  - $\overline{\overline{A}} = A$
- AND
  - $A \cdot 1 = A$
  - $A \cdot 0 = 0$
  - $A \cdot A = A$
  - $A \cdot \overline{A} = 0$
- OR
  - $A + 1 = 1$
  - $A + 0 = A$
  - $A + A = A$
  - $A + \overline{A} = 1$

Simplificação

- Os teoremas, propriedade e identidades da álgebra booleana podem ser aplicados para simplificarmos funções lógicas e, com isso, reduzirmos o número necessário de operações.

$$A + A \,.\, B =$$

$$(A + A) \,.\, (A + B) =$$

$$A \,.\, (A + B) =$$

$$B = 0$$

$$A \,.\, (A + 0) = A \,.\, A = A$$

$$B = 1$$

$$A \,.\, (A + 1) = A \,.\, 1 = A$$

Resumo

- Propriedade Comutativa
  - $A \cdot B = B \cdot A$
  - $A + B = B + A$
  - $A \oplus B = B \oplus A$
- Propriedade Associativa
  - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$
  - $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
  - $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$
- Propriedade Distributiva
  - $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  - $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

- Teorema de Morgan
- $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
- $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$

- NOT
  - $\overline{0} = 1$
  - $\overline{1} = 0$
  - $\overline{\overline{A}} = A$
- AND
  - $A \cdot 1 = A$
  - $A \cdot 0 = 0$
  - $A \cdot A = A$
  - $A \cdot \overline{A} = 0$
- OR
  - $A + 1 = 1$
  - $A + 0 = A$
  - $A + A = A$
  - $A + \overline{A} = 1$

- Propriedades (Leis) de Absorção
  - $A + A.B = A$
  - $A + \overline{A}.B = A + B$
  - $(A + \overline{B}).B = A.B$
- Identidades importantes
  - $A.B + A.\overline{B} = A$
  - $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$
  - $A.(A + B) = A$
  - $A.(\overline{A} + B) = AB$
  - $A.B + \overline{A}.C = (A + C) \cdot (\overline{A} + B)$

Exemplo

$$F = a + b \cdot \overline{(\overline{a} \cdot \overline{c})} =$$ Teorema de Morgan

$$a + b \cdot \overline{\overline{(a + c)}} =$$ Identidade

$$a + b \cdot (a + c) =$$ Distributiva

$$a + b \cdot a + bc =$$ Lei da Absorção

$$a + bc$$

Exemplo

```
F = a + b . (a' . c')'
A= 1 ; B= 0; C = 0

F = 1 . (0 . 1)'
F = 1 . 1
F = 1
```

```
F = a + b . c

F = 1 + 0 . 0
F = 1 + 0
F = 1
```

Exercícios

Simplificar as expressões:

1. $S = A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$
2. $S = (\bar{A} + B).(A + B)$
3. $S = ABC + A\bar{C} + A\bar{B}$

1) S = A . $\bar{B}$
2) S = B
3) S = A

Exercícios

1)

S = A . B' . C + A . B' . C'

S = A . B' . (C + C')

S = A . B’

Exercícios

2)

S = (A' + B) . (A + B)

Identidade

S = B

3)

S = A . B . C + A . C' + A . B'

S = A . [(B . C) + C'+ B']

S = A . [(b . c) + (c . b)']

Identidade A + A' = 1

S = A

Resumo

- Propriedade Comutativa
  - $A \cdot B = B \cdot A$
  - $A + B = B + A$
  - $A \oplus B = B \oplus A$
- Propriedade Associativa
  - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$
  - $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
  - $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$
- Propriedade Distributiva
  - $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  - $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

- Teorema de Morgan
- $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
- $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$

- NOT
  - $\overline{0} = 1$
  - $\overline{1} = 0$
  - $\overline{\overline{A}} = A$
- AND
  - $A \cdot 1 = A$
  - $A \cdot 0 = 0$
  - $A \cdot A = A$
  - $A \cdot \overline{A} = 0$
- OR
  - $A + 1 = 1$
  - $A + 0 = A$
  - $A + A = A$
  - $A + \overline{A} = 1$

- Propriedades (Leis) de Absorção
  - $A + A.B = A$
  - $A + \overline{A}.B = A + B$
  - $(A + \overline{B}).B = A.B$
- Identidades importantes
  - $A.B + A.\overline{B} = A$
  - $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$
  - $A.(A + B) = A$
  - $A.(\overline{A} + B) = AB$
  - $A.B + \overline{A}.C = (A + C) \cdot (\overline{A} + B)$